OSNOVNA RAVEN

1. Določi m tako, da bo imela enačba $8(x^2-1)+m=(m-2)x$ enaka korena.

2. Izračunaj absolutno vrednost kompleksnega števila

$$z=-\mathrm{i}^3+(2+\mathrm{i})^2+\frac{4+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}.$$

3. Dana sta vektorja $\vec{a}=(4,-5,8)$ in $\vec{b}=(-3,4,-2)$. Izračunaj kot med vektorjema. Izrazi ga v stopinjah in minutah.

4. Zapiši eksponentno funkcijo $f(x)=a^x$, če veš, da je $f\left(-\frac{2}{3}\right)=0{,}25$ in nato nariši njen graf.

5. Za katere x je definirana funkcija $f(x)=\log(-x^2-4x+5)$?

6. Izračunaj brez uporabe kalkulatorja $\sin(\alpha+\beta)$ in $\cos 2\alpha$, če veš, da je $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

7. Določi koeficienta a in b tako, da bosta 2 in 3 ničli polinoma $p(x)=2x^3+ax^2-13x+b$ in določi vse ostale ničle.

8. Števila $\frac{7}{x-4}$, $\frac{7}{x+3}$, $\frac{7}{2x+6}$ naj bodo zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Izračunaj x in zapiši zaporedje.

9. Napiši enačbo tangente na krivuljo $y=\frac{2-x}{2x}$ in določi njen naklon v točki $T(x,-1)$.

ALI:

Dokaži:
$$\left(\frac{x-3}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x-2}+\frac{6x}{x^3-8}\right)\cdot\left(5x+\frac{20}{x+2}\right)=\frac{-5}{x+2}$$

10. Dana je množica $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Iz elementov te množice sestavljamo prava štirimestna števila (0 ni na prvem mestu). Vsako cifro uporabimo samo enkrat.

(a) Koliko takšnih števil lahko sestavimo?

(b) Koliko večkratnikov števila 5 je med njimi?

(c) Izmed pravih štirimestnih števil (naloga a) izberemo eno število. Kolikšna je verjetnost, da je to število večje od 3000 in hkrati manjše od 5000?

3. SKUPINA

(A) PRVI DEL

① $8(x^2-1)+m=(m-2)x$ Določi m tako, da bo imela enačba enaka korena.

$8x^2-8+m=mx-2x$

$8x^2+x(2-m)-8+m=0$

$D=(2-m)^2-4\cdot 8(-8+m)=0$

$4-4m+m^2-32(-8+m)=0$
$4-4m+m^2+256-32m=0$
$m^2-36m+260=0$

$D=256 \qquad m_{1,2}=\frac{36\pm 16}{2} \qquad m_1=26 \quad m_2=10$

② $z=-i^3+(2+i)^2+\frac{4+2i}{i-1}$, $|z|=?$

$z=i+4+4i-1+\frac{4i-2-4-2i}{-1-1}$

$z=5i+3-\frac{2i-6}{2}$

$z=5i+3-i+3$

$z=4i+6$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

③ $\vec{a}=(4,-5,8)$
$\vec{b}=(-3,4,-2)$ $\varphi=?$

$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-12-20-16}{\sqrt{105}\cdot\sqrt{29}}=\frac{-48}{\sqrt{3045}}$

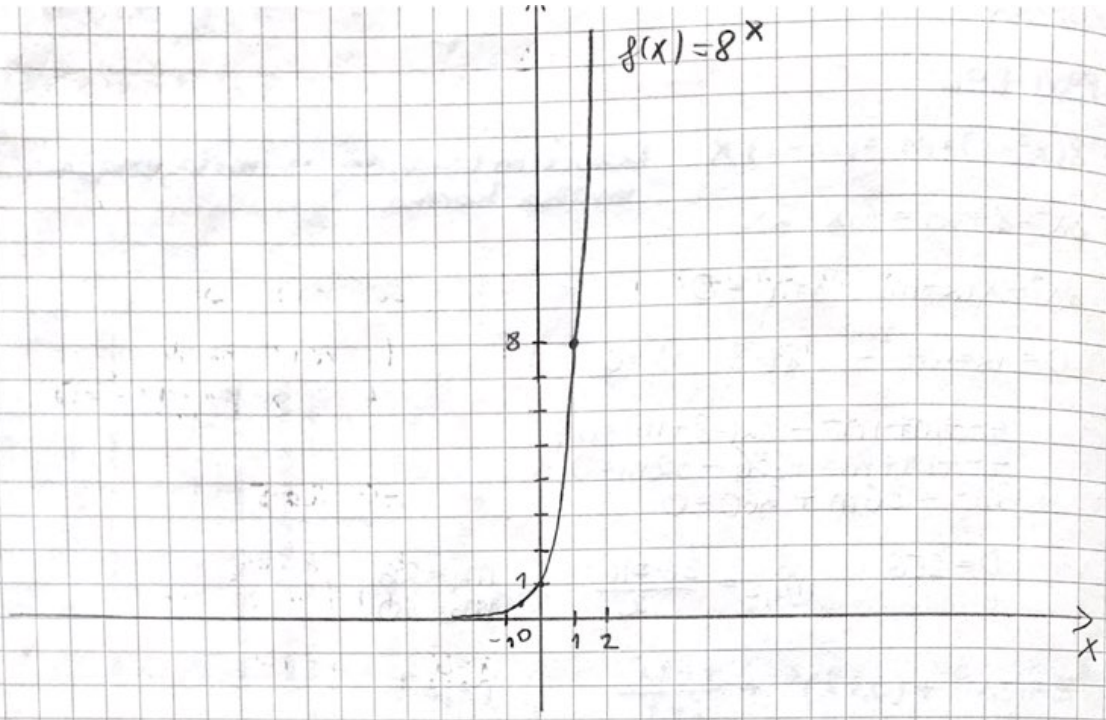
$\varphi=150^\circ 27'$

④ $f(x)=a^x$, $f(-\frac{2}{3})=0.25$, graf!

$\frac{1}{4}=a^{-\frac{2}{3}} \quad /^{-\frac{3}{2}}$

$a=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=8$

$f(x)=8^x$



⑤ $f(x) = \log(-x^2-4x+5)$, Df = ?

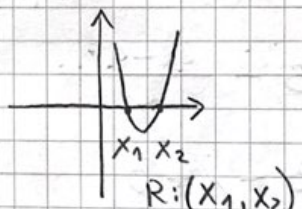
$-x^2-4x+5 > 0 \;/\cdot(-1)$

$x^2+4x-5 < 0$

$(x+5)(x-1) < 0$

$x_1 = -5,\ x_2 = 1$

Df: $-5 < x < 1$

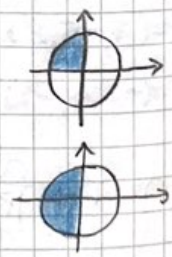


R: (x_1, x_2)

⑥ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos 2\alpha$ = ?

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(\frac{1}{3})^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$

$\sin\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\pm\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{15} \pm 10\sqrt{2}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

7. $a, b = ?$ 2, 3 - ničli polinoma

$p(x) = 2x^3 + ax^2 - 13x + b$ določi ostale ničle!

$0 = 2\cdot 2^3 + a\cdot 2^2 - 13\cdot 2 + b$

$0 = -10 + 4a + b$

$b = 10 - 4a$

$0 = 2\cdot 3^3 + a\cdot 3^2 - 13\cdot 3 + b$

$0 = 54 + 9a - 39 + b$

$0 = 15 + 9a + b$

$b = -15 - 9a$

$-15 - 9a = 10 - 4a$

$-5a = 25$

$a = -5$, $b = 10 + 20 = 30$ $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 13x + 30$

	2	−5	−13	30
		4	−2	−30
2	2	−1	−15	0

	2	−1	−15
		6	15
3	2	5	0

$2x + 5 = 0$

$x_3 = -5/2$

8. GZ: $\frac{7}{x-4}^{a_1}, \frac{7}{x+3}^{a_2}, \frac{7}{2x+6}^{a_3}$, $x = ?$, $6Z = ?$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$

$\frac{7}{2x+6} \cdot \frac{x+3}{7} = \frac{7}{x+3} \cdot \frac{x-4}{7}$

$\frac{x+3}{2(x+3)} = \frac{x-4}{x+3}$

$\frac{x-4}{x+3} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 2(x+3)$

$2x - 8 = x + 3$

$x = 11$

GZ: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

9. enačba tangente na krivuljo in njen naklon v $T(x_1, -1)$:

$y = \frac{2-x}{2x}$ tangenta: $y - y_1 = k_t(x - x_1)$

$-1 = \frac{2-x}{2x} \quad / \cdot 2x$ $\quad -x - 2$

$-2x = 2 - x$ $\quad x_1 = -2$

$T(-2, -1)$

$kt = f'(x_1)$

$y = \frac{2-x}{2x} = \frac{2}{2x} - \frac{x}{2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$kt = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$

(t:) $y + 1 = -\frac{1}{4}(x+2)$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - 1$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

ALI: Dokaži:

$$\left(\frac{x-3}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2} + \frac{6x}{x^3-8}\right)\cdot\left(5x + \frac{20}{x+2}\right) = \frac{-5}{x+2}$$

$$\frac{x-3}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2} + \frac{6x}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{5x^2+10x+20}{x+2} \stackrel{?}{=} \frac{-5}{x+2}$$

$$\frac{x^2-5x+6-x^2-2x-4+6x}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{5(x^2+2x+4)}{(x+2)} \stackrel{?}{=} \frac{-5}{x+2}$$

$$\frac{(-x+2)\cdot 5}{(x-2)(x+2)} \stackrel{?}{=} \frac{-5}{x+2}$$

$$-\frac{(x-2)\cdot 5}{(x-2)(x+2)} \stackrel{?}{=} \frac{-5}{(x+2)} \quad \checkmark$$

10. $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

4-mestna št. (0 ni na prvem mestu)

Vsako cifro le 1x

(a) Koliko št.?

$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$

(b) Koliko večkrat. št. 5?

$\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{1}_{0} + \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{1}_{5} = 220$

(c) Izmed vseh v (a) izberemo eno št. Kolikšna je verjetnost, da je to št. $3000 < x < 5000$?

$P(A) = \frac{m}{n}$ $\quad n = 720$, $m = \underline{2}_{3,4} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} = 240$

$P(A) = \frac{1}{3}$