1. V ravnini so dane točke $A(1,1)$, $B(-2,2)$ in $C(2,0)$.

(a) Izračunaj ploščino trikotnika $ABC$ in ga nariši.

(b) Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi $C$ in je vzporedna premici skozi $A$ in $B$.

(c) Napiši enačbo krožnice skozi točke $A, B$ in $C$, določi njeno središče in polmer.

2. Dana je funkcija $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$.

(a) Določi definicijsko območje, ničle, pole in asimptote funkcije.

(b) Izračunaj lokalni minimum in lokalni maksimum funkcije in nariši graf.

(c) Računsko dokaži, da so ekstremne točke in presečišča asimptot kolinearne.

VIŠJA RAVEN

<u>ALI:</u>

2. Ena od asimptot hiperbole v središčni legi je $y = -1{\cdot}25x$, eno od gorišč pa je $F_2(\sqrt{41}, 0)$.

(a) Zapiši enačbo hiperbole.

(b) Nariši graf krivulje.

(c) Poišči presečišče krivulje s simetralo sodih kvadrantov.

3. Najmanjša pozitivna rešitev enačbe $2\cos^2\alpha - 7\sin\alpha + 2 = 0$ je kot $\alpha$ v pravokotnem trikotniku, ki ima višino $v_c = 5\,\text{cm}$.

(a) Reši enačbo in določi kot $\alpha$.

(b) Izračunaj stranice in ploščino trikotnika, če je $\alpha = 30^\circ$.

(c) Določi prostornino prizme, ki ima za osnovno ploskev ta trikotnik, višino pa enako hipotenuzi tega trikotnika.

4. Rešitev enačbe $\log(68 + 2^x) = 1 + \log 10$ je prvi člen aritmetičnega zaporedja, vsota tretjega in četrtega člena pa je 20.

(a) Reši enačbo.

(b) Zapiši prve štiri člene zaporedja, če je prvi člen enak 5 in izračunaj dvanajsti člen.

(c) Koliko členov zaporedja je treba sešteti, da bo vsota enaka 192?

5. Dani sta kvadratna parabola $y = 4x - x^2$ in premica $y = x - 4$.

(a) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta parabola in premica. Nariši sliko.

(b) Določi ostra kota med krivuljama.

(c) Zapiši enačbo tangente na parabolo v presečišču z manjšo absciso.

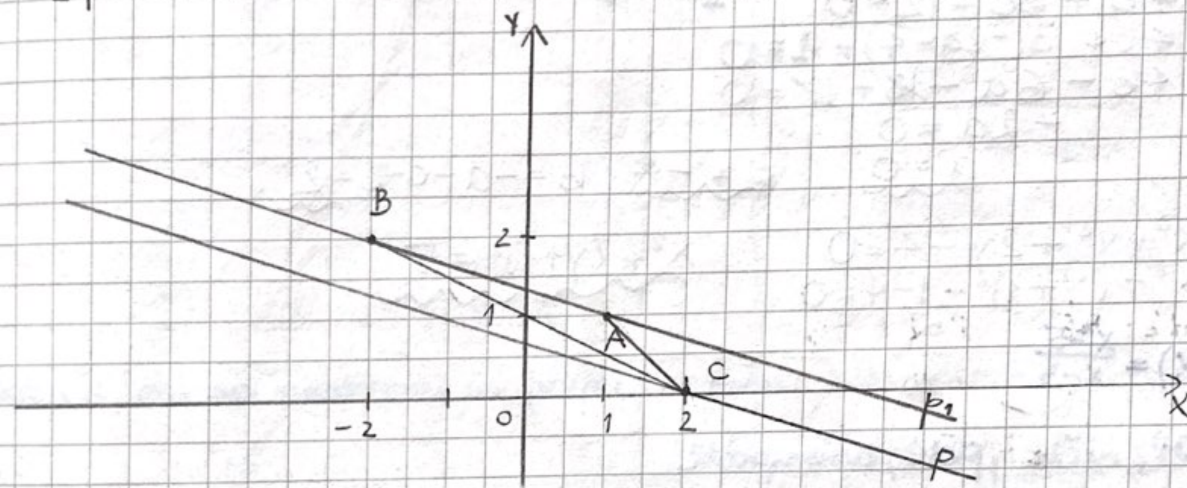
1. $A(1,1)$
$B(-2,2)$
$C(2,0)$

(a) $S_{\triangle ABC} = ?$ , nariši

$S = \frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|$

$S = \frac{1}{2}\left|(-2-1)(0-1)-(2-1)(2-1)\right|$

$S = \frac{1}{2}\left|-3(-1)-1\cdot 1\right| = \frac{1}{2}\left|3-1\right| = 1\,e^2$




(b) enačba premice skozi C, vzp. p skozi A in B

$p_1: \quad y = k_1 x + n_1$

$A: \; 1 = k + n_1$
$B: \; 2 = -2k + n_1$

$-1 = 3k_1$

$k_1 = -\frac{1}{3}$ $\quad n_1 = 1 - k_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$p_1: \; y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$p: \; y = kx + n$

$k = k_1 \Leftrightarrow p_1 \parallel p$

$y = -\frac{1}{3}x + n$

$C: \; 0 = -\frac{2}{3} + n$

$n = \frac{2}{3}$

$p: \; y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

(c) enačba krožnice skozi A, B in C, središče, R.

$S(p,q)$, $r$

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

A: $1+1+a+b+c=0 \Rightarrow a+b+c+2=0$ $/\cdot 2$

B: $4+4-2a+2b+c=0 \Rightarrow -2a+2b+c+8=0$

C: $4+2a+c=0 \Rightarrow 2a+c+4=0$

$\hookrightarrow c=-2a-4$

$$\begin{array}{r} \cancel{2a}+2b+2c+4=0 \\ -\cancel{2a}+2b+c+8=0 \\ \hline 4b+3c+12=0 \end{array}$$

$4b+3(-2a-4)+12=0$

$4b-6a-\cancel{12}+\cancel{12}=0$

$-2a=0$

$\underline{a=0}$, $\underline{c=-4}$, $b=-a-c-2=\underline{2}$

K: $x^2+y^2+2y-4=0$

$x^2+(y+1)^2-1-4=0$

$\underline{x^2+(y+1)^2=5}$

2. $f(x)=\frac{x^2-5}{x-3}$

(a) Df, ničle, pole, asimptote

NIČLE: $x^2-5=0$

$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$

$\underline{x_1=\sqrt{5},\ x_2=-\sqrt{5}}$

POLI: $x-3=0$

$\underline{x=3}$

Df: $\mathbb{R}-\{3\}$

ASIMPTOTA:

$$\begin{array}{l} (x^2-5):(x-3)=x+3 \\ -(x^2-3x) \\ \hline \quad 3x-5 \\ \quad -(3x-9) \\ \hline \qquad 4 \end{array}$$

$\underline{y=x+3}$

(b) lokalni min & max, graf

$f'(x)=0$

$f'(x)=\frac{2x(x-3)-(x^2-5)\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-6x-x^2+5}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}=0$

$x_1=5$, $y_1=\frac{20}{2}=10$ $T_1(5,10)$

$x_2=1$, $y_2=\frac{-4}{-2}=2$ $T_2(1,2)$

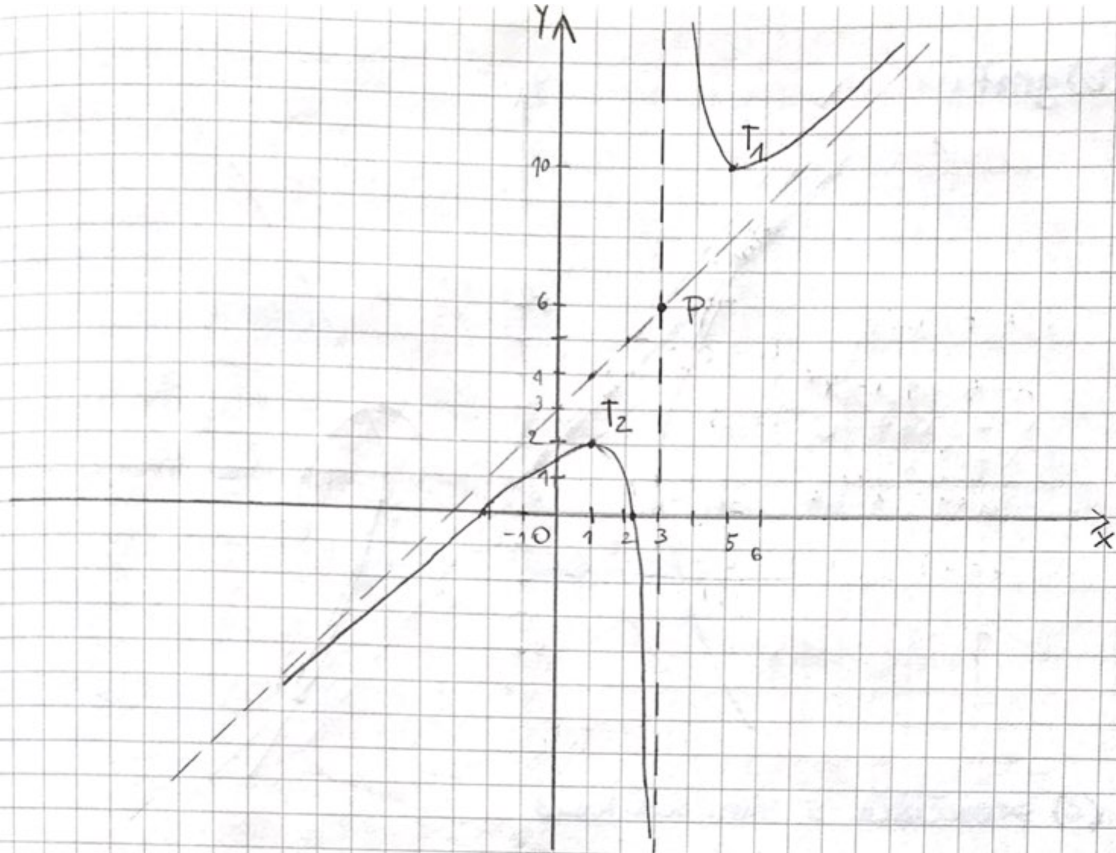
Dokaz za ekstreme:

| x | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| y' | − | 0 | + |

$T_1(5,10)$ lok. minimum

| x | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| y' | + | 0 | − |

$T_2(1,2)$




(c) Dokaži, da so ekstremi in preseč. asimpt. kolinearne!

$x = 3 \quad , \quad y = x+3$

$y = 6 \qquad P(3,6)$

$S\Delta = 0 \qquad T_1(5,10)$

$T_2(1,2)$

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right| \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{1}{2}\left|(1-5)(6-10)-(3-5)(2-10)\right| \stackrel{?}{=} 0 \quad /\cdot 2$$

$$\left|(-4)\cdot(-4)-(-2)(-8)\right| \stackrel{?}{=} 0$$

$$|16-16| \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \ \checkmark$$

ALI:

2. Hiperbola v sred. legi

$y = -1'25x$ (asimpt.) , $G_1(\sqrt{41},0)$

(a) enačba hip.

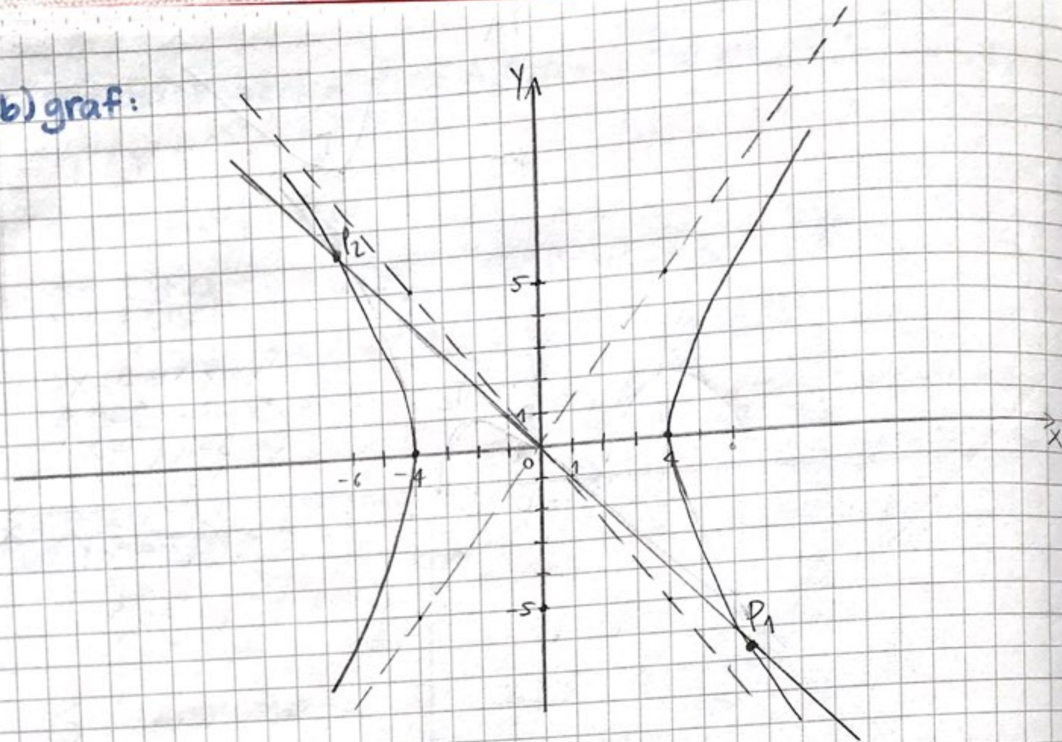
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad G(\pm e,0) \qquad e^2=a^2+b^2 \qquad \boxed{H:\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1}$$

$a^2+b^2=41 \qquad$ asimp. $y = \pm\frac{b}{a}$

$-\frac{b}{a} = -1'25$

$\frac{b}{a} = \frac{5}{4} \quad /\cdot 4a \qquad 4b = 5a \qquad b = \frac{5a}{4} \qquad a^2+\left(\frac{5a}{4}\right)^2 = 41 \qquad a^2+\frac{25a^2}{16} = 41 \qquad \frac{41a^2}{16} = 41 \quad /\cdot 16 \qquad 41a^2 = 41\cdot 16 \quad /:41 \qquad a^2=16 \qquad b^2=25$

(b) graf:




(c) presečišče s sim. sod. kvad.

$y = -x \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

$\frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1 \quad / \cdot 16 \cdot 25$

$25x^2 - 16x^2 = 400$

$9x^2 = 400$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{\pm 20}{3}$

$x_1 = \frac{20}{3}, \; y_1 = -\frac{20}{3} \quad P_1\left(\frac{20}{3}, -\frac{20}{3}\right)$

$x_2 = -\frac{20}{3}, \; y_2 = \frac{20}{3} \quad P_2\left(-\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$

(3.) Najmanjša pozit. reš. $2\cos^2\alpha - 7\sin\alpha + 2 = 0$ → je kot $\alpha$ v p∆ z $v_c = 5cm$.

(a) $\alpha = ?$

$2\cos^2\alpha - 7\sin\alpha + 2 = 0$

$2(1 - \sin^2\alpha) - 7\sin\alpha + 2 = 0$

$2 - 2\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 2 = 0 \quad / \cdot (-1)$

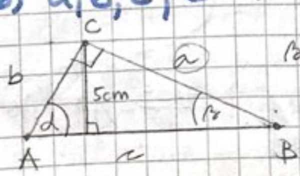
$2\sin^2\alpha + 7\sin\alpha - 4 = 0$

$(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha + 4) = 0$

1.) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ 2.) $\sin\alpha = -4$ // vred. sinx $[-1, 1]$

$\alpha = 30°$

(b) $a, b, c, S = ?$ ; $\alpha = 30°$




$\beta = 60°$ $\quad \sin 60° = \frac{5cm}{a} \Rightarrow a = \frac{5cm \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}c}{3} = 2\sqrt{3}cm$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{1} = 4\sqrt{3}cm$

$b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = (48 - 12)\,cm^2$
$b = 6\ cm$

$S_\Delta = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 6\ cm^2}{2} = 6\sqrt{3}\ cm^2$

(c) $V_{prizme} = ?$

$v = c$, $S_{o.p.} = S_\Delta$  o.p. $= \Delta$

$V = S_{o.p.} \cdot v$

$V = 6\sqrt{3}\ cm^2 \cdot 4\sqrt{3}\ cm = 72\ cm^3$

4. $\log(68+2^x) = 1 + \log 10$ → rešitev ($a_1$)

AZ: $a_1, a_2, a_3$

$a_3 + a_4 = 20$

(a) Reši enačbo!

$\log(68+2^x) = \log 100$ / antilog
$68 + 2^x = 100$
$2^x = 32$
$2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

(b) AZ: $a_1 \dots a_4$

$a_1 = 5$, $a_{12} = ?$

$a_3 + a_4 = 20$
$a_1 + 2d + a_1 + 3d = 20$
$2a_1 + 5d = 20$
$10 + 5d = 20$
$5d = 10$
$d = 2$

AZ: $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d$
AZ: $5, 7, 9, 11$

$a_{12} = a_1 + 11d = 27$

(c) $S_n = 192$, $n = ?$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$192 = \frac{n}{2}(10 + (n-1)2)$

$192 = 5n + n^2 - n$

$n^2 + 4n - 192 = 0$  $n_{1,2} = \frac{-4 \pm 28}{2}$

$a_1 = 5$
$d = 2$

$S_{12} = 6(10 + 11 \cdot 2) = 192$
$S_{16} = 8(10 + 15 \cdot 2) = 320$

$n = 12$

$n_1 = 12$
$n_2 = 16$

5. $y=4x-x^2$

$y=x-4$

(a) ploščina lika

PRESEČIŠČE:

$x-4=4x-x^2$

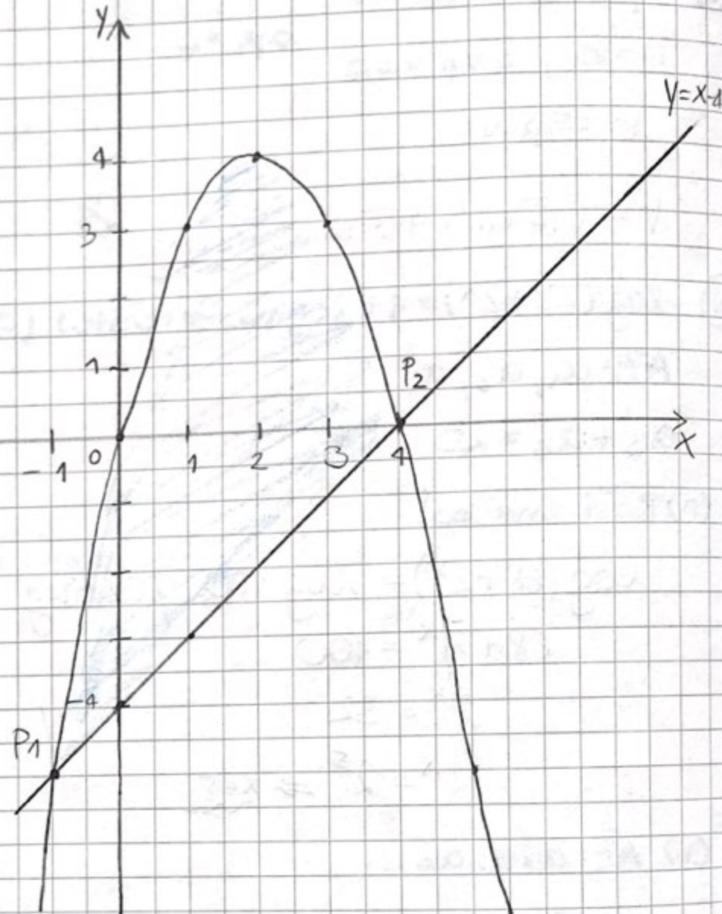
$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$x_1=-1,\ x_2=4$

$y_1=-5,\ y_2=0$

$P_1(-1,-5)$, $P_2(4,0)$




$$S=\int_{-1}^{4}(4x-x^2-x+4)\,dx$$

$$S=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx$$

$$S=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right)_{-1}^{4}$$

$$S=\left(-\frac{64}{3}+24+16\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)=$$

$$=44-\frac{65}{3}+\frac{3}{2}=\frac{143}{6}\doteq 23{,}8\overline{3}\ e^2$$

(b) ostra kota med krivuljama

$t_1$: $y-y_1=k_t(x-x_1)$  $P_2(4,0)$

$y=4x-x^2$  $k_p=1$

$y'=4-2x \Rightarrow k_{t_1}=4-8=-4$

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\left|\frac{1+4}{1-4}\right|=\frac{5}{3}\Rightarrow \varphi_1=59^\circ\,2'$$

$P_1(-1,-5)$

$k_{t_1}=4+2=6$  $k_p=1$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\left|\frac{1-6}{1+6}\right|=\frac{5}{7}\Rightarrow \varphi_2=35^\circ\,32'$$

c) $t$: $P(1,-5)$

$y+5=6(x+1$

$y=6x+1$