Izračunajmo $\int \frac{2x^3+3x^2-4x}{2x^2-3x+1}\,dx$.

Polinom v števcu je višje stopnje od polinoma v imenovalcu, zato delimo:

$$(2x^3+3x^2-4x):(2x^2-3x+1)=x+3$$
$$\underline{2x^3-3x^2+\ x\ \ }$$
$$6x^2-5x$$
$$\underline{6x^2-9x+3}$$
$$4x-3$$

Dobili smo:

$$\frac{2x^3+3x^2-4x}{2x^2-3x+1}=(x+3)+\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$$

In integral:

$$\int\frac{2x^3+3x^2-4x}{2x^2-3x+1}\,dx=\int(x+3)\,dx+\boxed{\int\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}\,dx}$$

gre krajše z uvedbo ...
za $2x^2-3x$ ...
ali kar števec ji od
od imen...

Integrala količnika ni težko izračunati:

$$\int(x+3)\,dx=\frac{x^2}{2}+3x+C$$

Racionalno funkcijo, ki je pod drugim integralom in ima v števcu polinom prve stopnje, v imenovalcu pa kvadratno funkcijo s pozitivno diskriminanto, najprej preoblikujmo.

Razstavimo imenovalec: daljši način

$$\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}=\frac{4x-3}{(2x-1)(x-1)}$$

Zapišemo zgornji izraz kot vsoto dveh ulomkov oblike:

$$\frac{4x-3}{(2x-1)(x-1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-1}$$

Desno stran enačbe damo na skupni imenovalec:

$$\frac{4x-3}{(2x-1)(x-1)}=\frac{Ax-A+2Bx-B}{(2x-1)(x-1)}$$

A in B določimo tako, da bosta števca na levi in desni strani enačbe enaka, saj sta enaka tudi imenovalca:

$$4x-3=Ax-A+2Bx-B$$

Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$\left.\begin{aligned} 4 &= A + 2B \\ -3 &= -A - B \end{aligned}\right\}$$

$$A = 2$$

$$B = 1$$

Funkcijo pod integralom lahko zapišemo:

$$\frac{4x-3}{(2x-1)(x-1)} = \frac{2}{(2x-1)} + \frac{1}{x-1}$$

In integriramo:

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}\, dx = \int \frac{2}{2x-1}\, dx + \int \frac{1}{x-1}\, dx =$$

Uvedemo novi spremenljivki:

$$u = 2x - 1 \qquad v = x - 1$$

$$du = 2\, dx \qquad dv = dx$$

$$= \int \frac{1}{u}\, du + \int \frac{1}{v}\, dv = \ln|u| + \ln|v| + C = \ln|2x-1| + \ln|x-1| + C =$$

$$= \ln(2x^2 - 3x + 1) + C$$

Celoten integral pa je tedaj enak:

$$\int \frac{2x^3+3x^2-4x}{2x^2-3x+1}\, dx = \int (x+3)\, dx + \int \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \ln(2x^2 - 3x + 1) + C$$