

4F

delovni list

15.10.2015 OR

Terapijske ploščine blava, ki go omejuje ta

(a) $y = 2 - x^2$ in simetrično ličje kvadrantov
 R: (graf, $\int_{-2}^2 \dots = \frac{9}{2}$)

(b) paraboli $y = \frac{5}{9}x^2 - 1$ in $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$
 R: (graf, $S = \int_{-3}^3 \dots = 2 \cdot \int_0^3 \dots = 8$)

(c) krivulje $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ in $y = 2\sqrt{2}x$
 R: (graf ~ 1 kvadrant, $S = \int_0^{\frac{1}{2}} \dots + \int_{\frac{1}{2}}^1 \dots = \ln 2$)

(d) krivulja $y = x^3 - x^2 - 2x$ in X os
 (graf ∇ , $S = S_1 + S_2 = \dots = \frac{37}{12}$)

(e) krivulja $f(x) = 2^x$ in premica $x = 2$
 (R: $\frac{3}{\ln 2}$)

(f) krivulja $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$ in premica $x = 2$
 R: $S = 3,32 e^2$

XIX. Integral

OSNOVNA RAVEN

- Izračunaj $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx$.
- Izračunaj $\int \frac{(1-x)^2}{x} dx$.
- Določi družino funkcij, katerih odvod je enak $f'(x) = \frac{(x^2-2)^2}{x^3}$.
- Izračunaj $\int \frac{2 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$.
- Izračunaj točno vrednost določenega integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3 \cos x - x) dx$.
- Nariši graf funkcije $f(x) = \frac{2}{x^3}$ in izračunaj ploščino lika med grafom funkcije in osjo x na intervalu $[1, 2]$.

Pri naslednjih nalogah je skica obvezna:

- Dan je polinom $p(x) = x^3 - 3x - 2$. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta graf polinoma in abscisna os.
- Dan je polinom $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta obe koordinatni osi in graf polinoma.
- Lik je omejen z obema koordinatnima osema, grafom funkcije $f(x) = e^x$ in premico $x = a$. Za kateri $a > 0$ ima ta lik ploščino enako 2? Rezultat zapiši na tri decimalke natančno.
- Realno število a je pozitivno. Graf funkcije $f(x) = -x^3 + a$ in koordinatni osi omejujejo lik s ploščino 12. Izračunaj število a .
- Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta premica $y = 1$ in parabola $y = x^2 - 1$. Rezultat naj bo točen.
- Dani sta funkciji $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ in $g(x) = -x + 5$. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa obeh funkcij.
- Nariši grafa funkcij $f(x) = -x^2 + 1$ in $g(x) = -2x^2 + 2$ ter izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata grafa.
- Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta premica $y = 1$ in graf funkcije $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$.
- Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo: krivulji $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, abscisna os in premica $x = 2$.

XIX. Integral

REŠITVE

- [1.] $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 3x^{-1} + C$ [2.] $\ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2} + C$ [3.] $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\ln|x| - 2x^{-2} + C$
 [4.] $-2\operatorname{ctg} x + \cos x + C$ [5.] $4 - \frac{\pi^2}{8}$ [6.] $S = \frac{3}{4}$ [7.] $S = 6\frac{3}{4}$ [8.] $S = \frac{1}{4}$ [9.] $a = \ln 3 \doteq 1,099$
 [10.] $a = 8$ [11.] $S = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ [12.] $S = 4\frac{1}{2}$ [13.] $S = 1\frac{1}{3}$ [14.] $S = \pi - 2$ [15.] $S = \frac{1}{3} + \ln 2$

21

$$p(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$

VR

- Poiščite ekstrema in prevoj polinoma p .
- Narišite graf polinoma p .
- Poiščite presečišča grafa polinoma p s premico $x + y - 4 = 0$.
- Izračunajte ploščino lika, ki ga omeujeta graf polinoma p in dana premica, na intervalu, ki vsebuje lokalni maksimum polinoma p .

♣ 22. Dana je funkcija $f(x) = \frac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$.

- Zapišite ničlo in pol funkcije f .
- Poiščite asimptoto grafa funkcije f .
- Poiščite ekstrem in prevoj funkcije f ter narišite njen graf.
- Izračunajte nedoločeni integral $\int f(x) dx$.

♣ 23. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x - 5}$

- Poiščite ničlo in pola funkcije f ter asimptoto grafa funkcije f .
- Poiščite ekstreme funkcije f .
- Narišite graf funkcije f .
- Zapišite enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(-2, y_0)$.
- Izračunajte $\int_2^4 f(x) dx$.

♣ 24. Dana je funkcija $f(x) = -3 \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

- Natančno narišite graf funkcije f in rešite neenačbo $f(x) < 0$.
- Pod kolikšnim kotom seka graf funkcije f ordinatno os?
- Izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
- Izračunajte prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če območje med abscisno osjo in grafom funkcije med zaporednima ničloma zavrtimo za 360° okoli abscisne osi.

♣ 25. a) Narišite graf funkcije $f(x) = 2 \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$.

- Rešite neenačbo $f(x) \leq -2$.
- Izračunajte kot in abscise presečišč, pod katerim graf funkcije f seka premico $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
- Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije f in koordinatni osi.

♣ 26. Dani sta krivulji z enačbama $x^2 + 4y^2 = 8$, $y^2 = \frac{1}{2}x$.

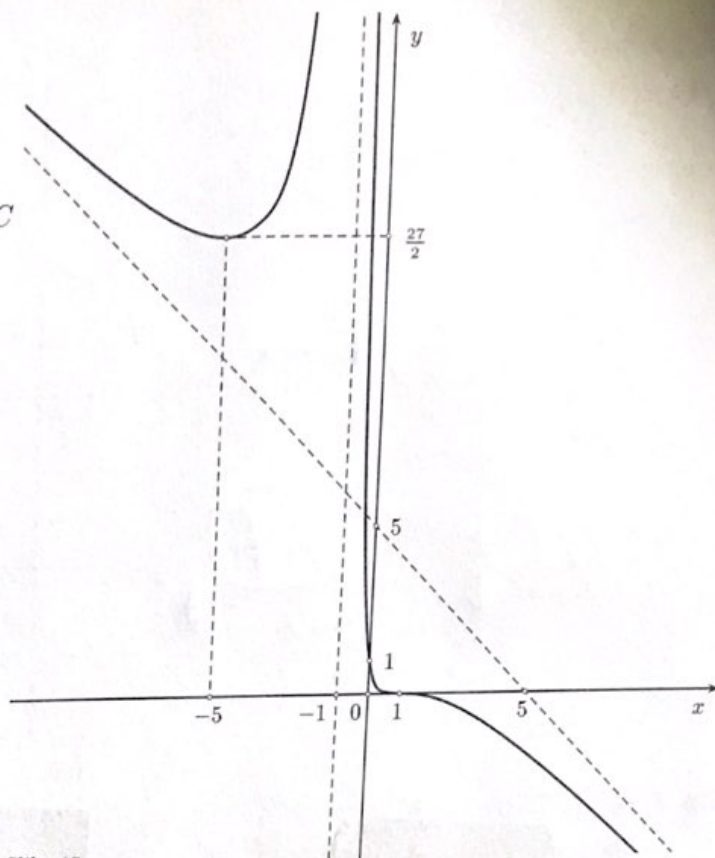
- Izračunajte presečišči med krivuljama.
- Izračunajte kot, pod katerim se sekata dani krivulji v prvem kvadrantu.
- V istem koordinatnem sistemu narišite obe krivulji.
- Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, če lik, ki ga v prvem kvadrantu omejujejo dani krivulji abscisna os, zavrtimo za 360° okoli abscisne osi.

♣ 27. Dana je hiperbola $9x^2 - 4y^2 - 18x - 27 = 0$.

- Narišite jo v koordinatnem sistemu.
- V točki $(\frac{7}{2}, y > 0)$ zapišite enačbo tangente na hiperbolo.
- Izračunajte dolžino tetive, ki jo od premice $x = \frac{7}{2}$ odreže hiperbola.
- Izračunajte prostornino vrtenine, ki nastane, če zavrtimo okoli abscisne osi za 360° lik, ki ga omejujejo hiperbola in premici $x = \frac{7}{2}$, $y = 0$.

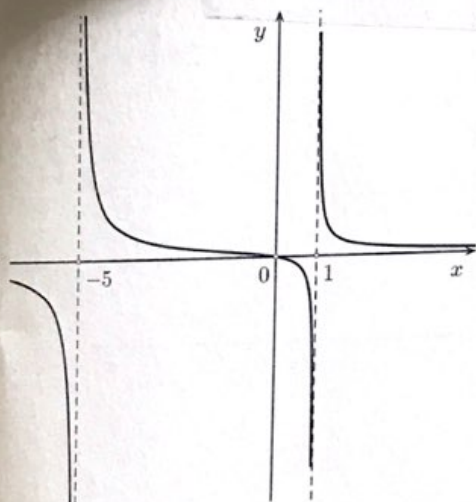
674. a) Ničla je $x_{1,2,3} = 1$, pol $x_{1,2} = -1$.
 b) Asimptota je premica $y = -x + 5$.
 c) V točki $(-5, \frac{27}{2})$ je lokalni minimum funkcije. Slika 15.
 d) $\int f(x) dx = \frac{x(10-x)}{2} - \frac{8}{x+1} - 12 \ln|x+1| + C$

675. a) Ničla je $x = 0$, pola sta $x_1 = -5, x_2 = 1$,
 asimptota je premica $y = 0$.
 b) Funkcija nima ekstremov.
 c) Slika 16. d) $y = -\frac{x}{9}$
 e) $\int_2^4 \frac{x dx}{x^2+4x-5} = \frac{1}{6}(11 \ln 3 - 5 \ln 7)$



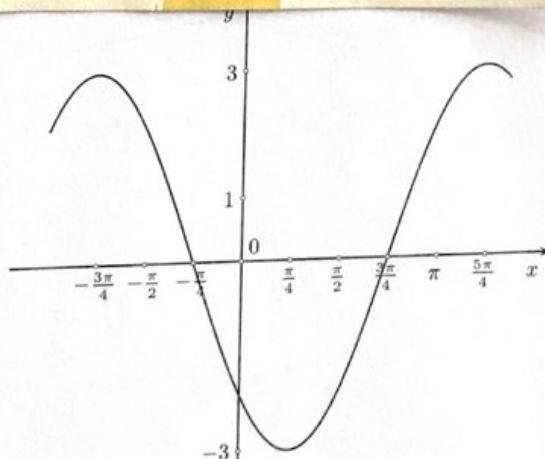
Slika 15

23 ↑



Slika 16

677. a) Slika 18. $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$
 b) $\varphi = 25^\circ 14'$
 c) $S = 3$
 d) $V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-3 \cos(x - \frac{\pi}{4}))^2 dx = \frac{9\pi^2}{2}$



22 ↑

21 lah. mah (3, 4)

$P_1(0, 4), P_2(2, 2), P_3(4, 0)$

$S = 4$

← 24 ↓

678. a) Slika 19.

b) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$

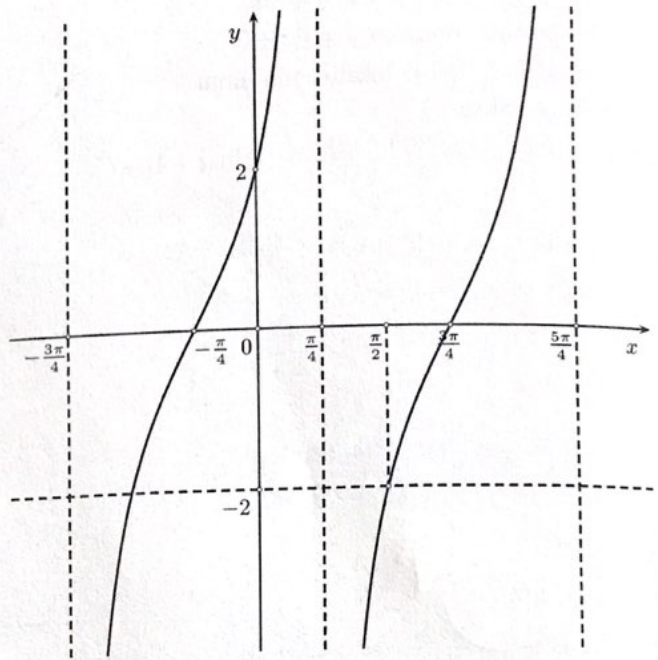
c) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}, \varphi = 69^\circ 27'$

d) $S = \ln 2$

25 ↑ →

26 ↓

27 ↘



Slika 19

679. a) (2, 1), (2, -1)

b) $\varphi = 40^\circ 36'$

c) Slika 20.

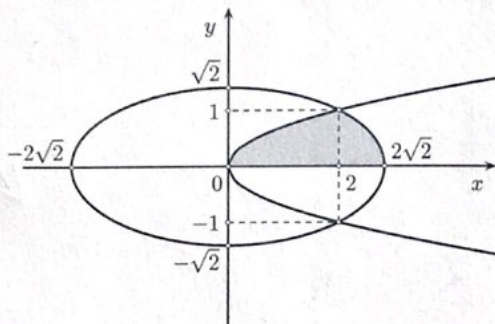
d) $V = \frac{\pi}{3}(8\sqrt{2} - 7)$

680. a) Slika 21. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

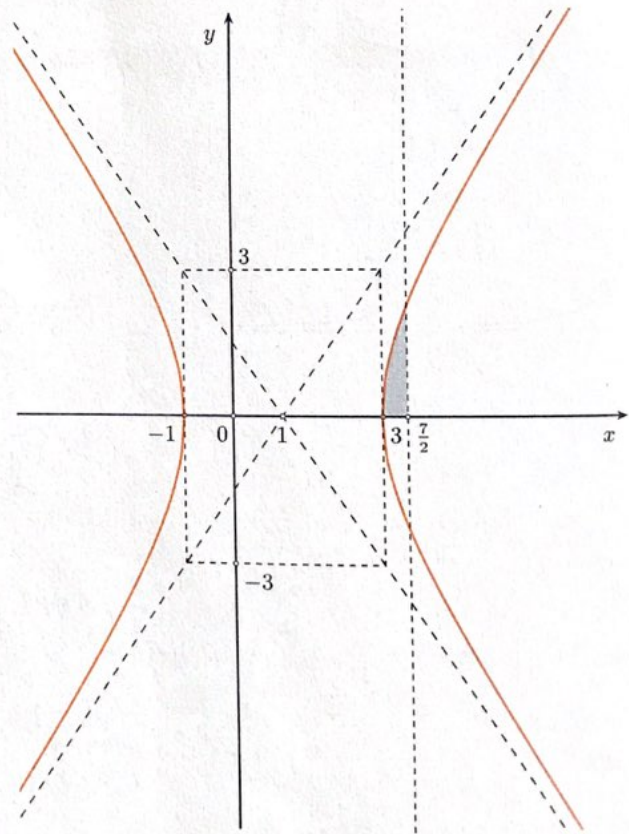
b) $y = \frac{5}{2}x - \frac{13}{2}$

c) $T_1\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right), T_2\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right), d = 4:5$

d) $V = \pi \cdot \int_3^{\frac{7}{2}} \left(\frac{9x^2 - 18x - 27}{4} \right) dx = \frac{39\pi}{32}$



Slika 20



Slika 21